企画・制作 朝日新聞社メディアビジネス局
監修 田中一之
広告特集

CTC PRESENTS

これからの世界を読み解く 数学体感教室 2022

新しい数学の世界をつくった ゲーデルの 不完全性定理を探検してみよう!

ゲーデルの不完全性定理をご存知でしょうか。前世紀に発見された数学の定理の中で、抜群の知名度を誇り、コンピューターのひな形となるチューリングマシンの創案にも大きな影響を与えたと言われています。この定理は、「不完全」「無矛盾」「決定不能」など思想的な響きをもつ言葉で表され、一見哲学的な印象を与えています。しかし、定理自体はあくまで数学の命題です。数学的論理で証明されていることを念頭に置き、周辺の関連項目・話題にも触れながら、この奥深い数理論理の世界を探検してみましょう。

INTERVIEW

数学や計算機科学に新しい見方をつくった ゲーデルの不完全性定理

数学の命題といえば、正しい（真）か間違っている（偽）かの二択であると思っておられる方が多いでしょう。20世紀初頭を代表する数学者ヒルベルトもそう考えました。そして、彼はあらゆる命題の真偽を自動的に判定する方法を見つけなさいと若い数学者たちに呼びかけました。対して、ゲーデルはいま知られているような公理論的方法では白黒判定できないグレーゾーンが必ず生じることを示し、さらにチューリングはどんな計算方法でもグレーゾーンが消せないことを示したのです。しかし、グレーゾーンはいくらでも狭めることができ、そうして発生する濃淡で、数理科学に新しい尺度がもたらされました。それまでの尺度は、あるモノを基準にして別のモノを測るようなものでしたが、新しい尺度は認識者の属性や資源に基づきます。例えば、計算に要する時間や記憶容量の大きさで問題を分類する「計算の複雑さの理論」、集合の存在公理の強弱によって数学の定理を分類する「逆数学」などが生まれました。

第一不完全性定理を学ぶ意義と楽しさ

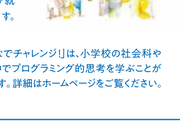
不完全性定理は、現代数学の中でもかなり特殊な定理といえるでしょう。この定理を理解するためには、定理を理解しようとする自分も理解しないといけないのです。そのため大切なのは、とくに自然数に関する数学的記述の世界（算術）と、算術について考える自分（メタ数学）の違いをまず明確にすることです。たとえば、「xは偶数である」というのと、「xは変数である」というのでは、議論のレイヤーが異なるのがわかりますか？「（自然数）xは偶数である」は「$x=y+y$となるyが存在する」のように数学的に言い換えられますが、「xは変数である」は言い換えようのないメタ数学の主張です。不完全性定理を学ぶと、自分が数学の基礎について意外に知らないことがわかり、またそれを知ることが面白いと思うようになるでしょう。そして、さらに先に進むと、算術の中に映される自分を観察して、自分にできること、できないことがわかってきます。ここまで来ると、決定論的数学を超えた、不完全性の新境地が拓かれるのです。

第二不完全性定理は超難関

第一不完全性定理は算術の中に映される自分（メタ数学）を観察することで導かれましたが、第二不完全性定理では自分を観察する自分をさらに観察することによって導くことになります。つまり、自分が二重に現れ、その間の相似性が鍵になるのです。これにより第一定理の形式化を体系内で実行できて、それから自らの無矛盾性を証明できないという第二定理が得られます。ヒルベルトとベルナイスの原証明については描著『数学基礎論序説』で説明しています。また、それとは異なるモデル論的証明の概略を朝日新聞デジタル特設ページに掲載していますのでご覧ください。

監修：東北大学 数理科学連携研究センター
田中 一之 氏
東京工業大学理学部卒、カリフォルニア大学バークレー校数学科Ph.D.。現在、東北大学数理科学連携研究センター教授、同大学院理学研究科名誉教授。専門は数学基礎論、不完全性定理、逆数学、計算理論などに関する多数の原著論文がある。主な著書に『ゲーデルに挑む』（東京大学出版会）、『チューリングと超パズル』（東京大学出版会）、『山の上のロジック学園』（日本評論社）、『数学基礎論序説』（森北出版）、訳書に『ゲーデルの定理』（みすず書房）、監訳に『逆数学』（森北出版）。

CTC 未来財団
次世代のための財団
CTC未来財団は、「次世代の育成支援」を目的に伊藤忠テクノソリューションズ株式会社（略称：CTC）が設立。児童・青少年に対するIT教育の支援事業、ITを志す青少年に対する修学支援事業、障がいのある青少年に対する修学及び就労機会創出の支援事業を行っています。



当財団が開発した「みんなでチャレンジ!」は、小学校の社会科や総合的な学習の時間の中でプログラミング的思考を学ぶことができる無料の貸出教材です。詳細はホームページをご覧ください。

じっくり見ていこう!

不完全性定理を知るヒント

- 不完全性定理
- 不完全性定理の源流
- 関連トピック
- 不完全性定理の発展
- 数学体感チャレンジ（論理パズル）

START

数学の自由を無矛盾性で確保する ヒルベルト・プログラム

「我々は知らねばならない、我々は知るであろう」は名言だね。

「現代数学の父」と呼ばれているよ。

ダーヴィト・ヒルベルト【1862 - 1943】

ドイツの数学者。「現代数学の父」とも呼ばれる。1900年のパリでレーマン予想を含む当時未解決だった「23の問題」を発表し、数学の発展に大きく寄与した。生涯にわたり完全で無矛盾な数学の構築を追求した。

19世紀の終わり、非ユークリッド幾何学や集合論など新しい数学が創設されるとともにパラドックスや互いに相反する結果もつぎつぎと発見されて、数学を際限なく拡張することが問題になりだした。ヒルベルトは「何人もカントルが創造してくれた楽園から我々を追い出すことはできない」と、数学の自由を守るために立ち上がった。まず公理化を推進し、命題や証明を記号の組合せと見て分析し、無矛盾や完全性を担保すれば、数学が救済できると彼は考えた。この試みは「ヒルベルト・プログラム」と呼ばれるようになる。

数学の証明を数学的に研究する 証明論

証明の複雑さは、使われる公理の強さと見つけ出す。

通常の数学では最初に公理系を定めてそこでどんな定理が導けるかを考えるが、逆数学ではまず定理を与えてその証明に真に必要な公理は何かを考える。適切な公理を見つけると、公理と定理はしばしば同値になる。1970年代にフリードマンは、「2階算術」と呼ばれる強い集合論の枠組みで、集合の存在公理の分類を利用して、様々な分野の定理を分類する研究を始め、1980年代にシンプソンらがさらに大きく発展させた。

数の富は「証明の巨大な集積として現れる?」

体系に矛盾がないことを証明するんだ。

数学における証明に焦点をあてた学問分野。ヒルベルトは数学そのものを研究対象とする意味でメタ数学とも呼んでいた。ゲーデルの不完全性定理の後に、ゲンツェンが新しい形態の演繹体系を導入し、通常より拡張された数学的帰納法を用いて自然数論の無矛盾性を証明した。この演繹体系や論法により証明論が大きく発展する。また、証明とソフトウェアプログラムの類似性から計算機科学にも役立つ。

定理を証明するのに必要な公理は何か 逆数学

公理をうまく探せば、公理⇔定理になることがあいだよ。

この文は偽である 嘘つきのパラドックス

嘘つき? 正直者?

「クレタ人の預言者エピメニデスが、クレタ人はいつも嘘をつくと言った」と新訳聖書に書かれている。

エピメニデス【紀元前600年頃】

「これは偽である」は形式化できないが、「これは証明できない」は形式化できる。

エピメニデスの話を「私は嘘を言っている」という形に単純化し、パラドックスとして論じたのは、紀元前4世紀のミレトスのエウブリデスである。ゲーデルは「この命題は証明可能でない」という命題を構成して第一不完全性定理を証明した。

数学体感チャレンジ!

問1 「この文は真である」は真か?

問2 「この文は8文字だ」の否定文を考えよ。

答えはwebで

沈黙やウソによる高度な意思伝達も論理的に分析 論理パズル

数学体感チャレンジ!

正直村と嘘つき村がある。正直村の人は必ず真実を述べ、嘘つき村の人は必ず嘘をつく。あなたは正直村に向かっている。道を進むと分かれ道にさしかかった。片方は正直村、片方は嘘つき村に続いているが、どちらが正直村への道か分からない。そこに村人が現れた。この村人が、正直村の人か、嘘つき村の人か分からない。あなたがこの村人に1回だけ質問をして、正直村に行く道を知るには、どのような質問をすればいいだろうか?

答えはwebで

「知っている」という様相を使って考えてみよう。

知識を扱う様相論理を認識論理という 泥んこパズル

数学体感チャレンジ!

何人かの子どもが一緒に泥んこ遊びをしている。そのうち人の額に泥が付いていて、どの子も他の子の額は見られるが、自分の額は見られない。そこに大人が通りかかって「この中で少なくとも1人の額に泥が付いている」と伝え、全員の子どもに同時に「自分の額に泥がついているかわかるか」を繰り返し聞いていく。$k-1$回目まで泥のついた子どもたち含めみな「いいえ」と答えていたが、k回目で泥のついた子どもたちだけがみな正しく「はい」と答えた。どうしてだろうか。

答えはwebで

不完全性定理の理解を深める 様相論理

様相論理は、古典論理に新たな演算子□などを追加し、真か偽かの二値だった命題の生成を「必然である」「知っている」「信じている」等の主観的判断を含む表現に拡張する。ゲーデル『証明可能性』という様相を用いた不完全性定理の説明を示唆している。また、様相論理の汎用モデルとしてクリプキによる（可能世界の）遷移システムが有名であるが、逆に近年はシステムの記述言語として様相論理が注目され、ゲーム理論や計算理論への応用も広がっている。

証明可能性という様相を調べてみよう。

不完全性定理

自然数論をどう形式化しても、決定不能な命題が存在する

ゲーデルの第一不完全性定理

ゲーデル大は証明もも反証もできないよ。

アリストテレス以来最も偉大な論理学者といわれる。

クルト・ゲーデル【1906 - 1978】

オーストリア＝ハンガリー帝国（現チェコ）に生まれ育ちアメリカに移住した数学者。ウィーン大学で数学と物理を学んだ。1930年に学位論文として1階論理の完全性定理を発表後、1931年には、自然数の体系での決定不能な命題が存在と証明する「不完全性定理」を発表し、数学のみならず、さまざまな分野に影響を与えた。集合論の分野でも重要な業績を残しており数学基礎論を大きく前進させた。また不無矛盾性定理の証明の過程で用いられたコードにも着想されますな方法は、チューリングの仕事とともに、その後のコンピューターサイエンスの発展にもつながっている。アインシュタインと親密な交流があったことでも知られている。

GOAL

どんな形式体系も自らが矛盾していないことは示せない

ゲーデルの第二不完全性定理

矛盾が出ない保証を与えようとすると、矛盾が生じるなんて。

ある程度の算術が行える無矛盾な形式体系は、自らの無矛盾性を証明できない。

ゲーデルはこの定理について概要を述べただけで、詳しい証明を与えるはずだった続編を発表しなかった。その後(1939年)、ヒルベルトとベルナイスが最初の厳密な証明を与えた。証明の大筋は第一定理の形式化になるが、第二定理が成り立つ体系の条件は第一定理のそれよりも強く、和積演算が正しく行えるだけでなく、数学的帰納法が必要条件となる。以下では、無矛盾な形式体系として1階論理上のペアノ算術PAを選んでおくが、公理系の詳細は重要でないので省略する。いま、「命題AがPAで証明可能である」を□Aで表すと、ゲーデル文GはPA上でG↔¬□Gを満たす。また、「PAが無矛盾である」は¬□(0=1)で表せ、これをCon(PA)とおく。すると、第一不完全性定理の【補足説明】で述べた、定理の前半(1)はCon(PA)→¬□Gと形式的に表せる。¬□GはGに等しいから、Con(PA)→Gでもある。問題はこれをPAの中で証明することであり、その概要※はweb解説で示す。まず、Con(PA)→Gが言えたとして、さらにCon(PA)が証明できるなら、論理規則によってGも証明できるので、第一定理の結論に反する。よって、Con(PA)は証明できないことになる。 ※こちらの詳しい説明はwebでご覧いただけます。

数学体感チャレンジ!

問1 「自らが証明できる」という意味のヘンキン文Hは(PAで)証明できることを示せ。

問2 自らの矛盾性¬Con(T)を証明する無矛盾な理論Tがあることを示せ。

答えはwebで

形式体系が健全※で、その中で自然数の和積演算が正しく行えるなら、証明も反証もできない命題がある。 ※健全とは、証明できる命題がすべて真になること。改良条件については下記の【補足説明】を参照。

ゲーデルはこの定理の証明に向けて、「自らが証明できない」という意味をもつ文（厳密にいえば、それと同値な文）を形式体系の中で構成した。これをゲーデル文Gといい、以下で示すように文Gは証明も反証もできない。

ゲーデル数

今で言うデジタル化かな?

数学を語る言葉ないしそれに関する約束事を「メタ数学」という。ゲーデルは記号列に自然数のコード（「ゲーデル数」）を一意に割り振る方法を考案して、例えば「ゲーデル数nの論理式が証明可能である」というメタ数学的言明が、自然数nに関する述語とみなせることに注目した。ゲーデル数の扱いにおいて基本となる数学的事実との自然数も一意に素因数分解できることで、さらに次の事実も使われるので、考えてみよ。

数学体感チャレンジ!

問1 kより大きな素数は、$k!+1$以下に存在することを示せ。ただし、$k!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots k$である。

問2 3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると2余る数は何か?

答えはwebで

2問とも解けるかな?

ゲーデル文G

「この文は証明できない」という大ばこ。

原文の「17 Gen r」

以下では、0も自然数とする。まず、「変数xに関する論理式」を（ゲーデル数の）大きさの順に並べる。$F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$,… 。たとえば、$F_0(x)$は「xは偶数である」、$F_1(x)$は「$x>0$」などだ。そして、「論理式$F_k(x)$が証明できない」という論理式を$P(x)$とする。たとえば、$P(0)$は「$F_0(0)$が証明できない」、つまり「0は偶数である」が証明できない」になる。すると、$P(x)$もxに関する論理式なので、あるaが存在して、$F_a(x)$が$P(x)$と一致する。そこで、$x=a$とおけば、$F_a(a)$は$P(a)$と一致する。他方、$P(a)$は「$F_a(a)$が証明できない」を表しているから、$F_a(a)$をGと置き換えれば、Gは「Gが証明できない」を表しており、これがゲーデル文となる。

※こちらの詳しい説明はwebでご覧いただけます。

ゲーデル文Gは健全な算術体系では証明も反証もできない。

最初に、Gが証明されたと仮定して矛盾を導く。健全な体系では、証明されるものは真なので、Gも真になり、Gの定義から、Gは証明できない。よって、矛盾となって仮定が否定される。次に、Gが反証された、つまり¬Gが証明されたとして、矛盾を導く。健全な公理系ではGの否定は真となる。すると、Gが証明できることになり、健全性からGは真となる。他方、Gの否定も真なので、矛盾が導かれた。よって、Gは反証できない。

【補足説明】ゲーデルの不完全性定理の原論文においては、形式体系に対する仮定は「健全性」よりやや弱い「ω無矛盾性」という条件で、体系がω無矛盾であるとは「どの論理式$A(x)$についても、コホ$A(x)$が証明できれば、¬$A(n)$が証明されない自然数nがある」ことをいう。ここで、“ω自然数”nを形式的に表現する記号列で、例えばS^0は「1+1」などとする。そして、ゲーデルの結果を厳密に述べれば、(1) 無矛盾な体系では、Gは証明できない、(2) ωω無矛盾な体系では、¬Gは証明できない となる。(2) の仮定を「無矛盾」に弱めたのはロッサーの仕事（1936年）である。

ゲーデルの第一不完全性定理・第二不完全性定理や関連する項目の詳しい説明のほか、数学体感チャレンジの答えをweb上で紹介しています。詳しくはこちらからアクセスしてください▶

「答えは、CTC。」
CTCは、最先端のテクノロジーで社会のデジタル化を支えています。
ITの可能性に挑戦し、明日の世界を担う次世代を応援します。
CTC Challenging Tomorrow's Changes
伊藤忠テクノソリューションズ株式会社 www.ctc-g.co.jp

不完全性定理の一般化

恒真な命題と証明可能な命題の一致 ゲーデルの完全性定理

この定理の一般化の限界から不完全性定理のアイデアが生まれた。

自然数論には、自然数全体からなる標準構造がある。この構造で成り立つ1階論理式の全体を真の1階算術TAと呼ぶ。TAには標準構造以外のモデル（超準モデル）も存在する。超準モデルには、すべての自然数より大きな無限大の要素が存在する。同様なことは、実数論についても言える。無限大の要素εが存在すると、実数論のモデルでは$1/\varepsilon$も存在して、これはどの標準正実数よりも小さい無限小の要素になる。微積分の計算の際に非公式に使われるΔxが要素として存在しているから、微積分の議論が容易に展開できるようになる。

※TAは完全であるが、TAの(2)等も具体的に定まる手段が与えられていないので、通常の意味では形式体系とは言えない。

エルブランの定理や量化記号消去法などを勉強しよう。

1階論理では標準モデルと区別できない 超準モデル

見えるものでも、あるんだよ。

0, 1, 2, …

無矛盾であれば、いろんなモデルが作れるよ。

決定問題の肯定的な解決 実数論の完全性

真理が定義不可能であることを発見した。

アルフレッド・タルスキ【1901 - 1983】

タルスキは、ポーランドで前半生、アメリカで後半生を送った数学者・論理学者。言語意味論・モデル理論の創始者として知られる一方、バナッハ＝タルスキのパラドックスや、実閉体や複素数の代数理論の完全性証明その応用でも有名。

実数論の中で、整数であるという性質は定義できないんだ。

実数論や初等幾何学には不完全性定理は適用できないよ。

決定問題の公理論的に考えてみると。

実数の代数理論（実閉体の1階理論）の完全性を用いて、タルスキは非負値有理関数に関するヒルベルトの第17問題に対する別証を与えた。他方、実閉体に指数関数を加えた1階理論の決定問題は未解決である。また、タルスキは初等幾何学を1階論理の上に形式化し、その完全性も示している。

数学のエキスパートシステムは作れるか? 決定問題

なんでも真偽判定してくれるなら、数学者はいらないね。

計算できない実数（無限小数）がある。

不完全性定理のコンピューター版

コンピューターの理論的模型を発案 チューリングの停止問題

万能チューリングマシンも万能ではないんだね。

チューリングマシンは、無限に伸びたテープと、その上で記号の読み書きをするヘッドおよびそれを制御する有限制御部で構成される。テープはマス目に区切られ、ヘッドはマス目の記号を読み取ったり書き込んだり、左右に動いたりする。およそ計算されうることは、この機械で処理できるとみなされている。チューリングマシンの動作はプログラムで表すこともでき、プログラムと入力データの組を与えて、そのプログラムが表すチューリングマシンがその入力データに対して行う動作を一つの機械で模倣するような万能チューリングマシンが存在する。万能チューリングマシンが、どのようなプログラムとデータに対して停止するかを判定するアルゴリズムがあるか、というのが「停止問題」で、チューリングはこれを否定的に解決した。

Yes or Noの決定問題が、難易度の問題に変わってきた。

100万ドルの懸賞問題 P≠NP予想

ゲーデルがフォン・ノイマンに尋ねた問題だよ。

クレイ数学研究所によって100万ドルの懸賞金がかけられているミレニアム懸賞問題の1つ。クラスPは、入力サイズに対して多項式時間内で解くことができる問題の全体。クラスNPは、同じく多項式時間内で解の検証ができる問題の全体。P が NPに含まれるのは明らかだが、逆が未解決問題である。一般にP≠NPと予想されているが、両クラスを分離する具体例は見つかっていない。

ランダム性を使用した不完全性定理 チャイティンの不完全性定理

ランダムって何だろう?

有限数列がランダムであるとは、それを生成するための簡便な方法がなく、数列そのものをデータに用いない限りは生成できないようなものである。チャイティンは、どんな無矛盾な理論でも「sがランダムである」という命題は有限個の数列sについてしか証明できないこと、換言すれば「sがランダムである」という真な命題で証明できないものが無限個あることを示した。さらに、彼はプログラムの停止確率を与えるような無限ビット列Ω（オメガ）を定義し、それと不完全性定理との関わりも論じている。

昨年5億ポンド紛失になった人工知能の先駆者。

アラン・チューリング【1912 - 1954】

イギリスの数学者。計算可能性やチューリングマシンに代表される数理論理学の分野での功績とともに、暗号解読や人工知能の分野でも活躍したことで知られる。特に人工知能の分野では、チューリングテストと呼ばれるコンピューターの知性を判定するテストを考案した。

アルゴリズム【ALGORITHM】 数学的問題を解くための手順を明確に定めたもの。

ヒルベルトの23の問題 1900年のパリでヒルベルトが発表した23の数学の問題。

ゲーデルの不完全性定理 自然数論を含む無矛盾な公理系は、その公理系の中で証明も反証もできない命題が存在する。

ゲーデル数 数学的対象を自然数で表すこと。

ゲーデル文 自分自身の証明不可能性を主張する文。

ゲーデルの第二不完全性定理 自然数論を含む無矛盾な公理系は、その公理系の無矛盾性を証明できない。

ゲーデルの完全性定理 1階述語論理において、ある論理式が恒真であることと、その論理式が証明可能であることは同値である。

コンパクト性定理 1階述語論理において、ある論理式の集合が充足可能であることと、その論理式の集合の有限部分集合がすべて充足可能であることは同値である。

ロスの定理 1階述語論理において、ある論理式が可算無限個のモデルをもつならば、有限個のモデルをもつ。

ヘンキン文 自分自身の証明可能性を主張する文。

ロッサーの定理 第一不完全性定理の証明で用いられた文Gを、ωの仮定を弱めて証明できることを示した定理。

ゲーデルの加速定理 証明の複雑さを計算する関数が、計算可能な関数よりも速く増大することを示した定理。

ゲーデルのギャップ定理 計算可能な関数の中で、ある関数よりも速く増大するものが存在することを示した定理。

ゲーデルのブーストラップ法 算術の体系の中に、その体系の無矛盾性を証明できるような体系が存在することを示した定理。

ゲーデルのスピードアップ定理 証明の複雑さを計算する関数が、計算可能な関数よりも速く増大することを示した定理。

ゲーデルの真理関数 論理式の真偽を判定する関数。

ゲーデルの証明論 証明の構造を研究する学問。

ゲーデルの論理学 論理学の研究。

ゲーデルの数学 数学の研究。

ゲーデルの哲学 哲学の研究。

ゲーデルの物理学 物理学の研究。

ゲーデルの経済学 経済学の研究。

ゲーデルの心理学 心理学の研究。

ゲーデルの社会学 社会学の研究。

ゲーデルの政治学 政治学の研究。

ゲーデルの法学 法学の研究。

ゲーデルの医学 医学の研究。

ゲーデルの生物学 生物学の研究。

ゲーデルの化学 化学の研究。

ゲーデルの地学 地学の研究。

ゲーデルの天文学 天文学の研究。

ゲーデルの気象学 気象学の研究。

ゲーデルの地理学 地理学の研究。

ゲーデルの歴史学 歴史学の研究。

ゲーデルの考古学 考古学の研究。

ゲーデルの人類学 人類学の研究。

ゲーデルの言語学 言語学の研究。

ゲーデルの文学 文学の研究。

ゲーデルの芸術 芸術の研究。

ゲーデルの音楽 音楽の研究。

ゲーデルの美術 美術の研究。

ゲーデルの建築 建築の研究。

ゲーデルの工学 工学の研究。

ゲーデルの農学 農学の研究。

ゲーデルの商学 商学の研究。

ゲーデルの経営学 経営学の研究。

ゲーデルの会計学 会計学の研究。

ゲーデルの法律 法律の研究。

ゲーデルの政治 政治の研究。

ゲーデルの経済 経済の研究。

ゲーデルの社会 社会の研究。

ゲーデルの心理 心理の研究。

ゲーデルの哲学 哲学の研究。

ゲーデルの物理 物理の研究。

ゲーデルの化学 化学の研究。

ゲーデルの生物 生物の研究。

ゲーデルの地学 地学の研究。

ゲーデルの天文 天文の研究。

ゲーデルの気象 気象の研究。

ゲーデルの地理 地理の研究。

ゲーデルの歴史 歴史の研究。

ゲーデルの考古 考古の研究。

ゲーデルの人類 人類の研究。

ゲーデルの言語 言語の研究。

ゲーデルの文学 文学の研究。

ゲーデルの芸術 芸術の研究。

ゲーデルの音楽 音楽の研究。

ゲーデルの美術 美術の研究。

ゲーデルの建築 建築の研究。

ゲーデルの工学 工学の研究。

ゲーデルの農学 農学の研究。

ゲーデルの商学 商学の研究。

ゲーデルの経営 経営の研究。

ゲーデルの会計 会計